Εισαγωγή στην Τοπολογία, 21/9/2018, Α. Τόλιας

Θέμα 1. (2 μον.)
(α) Να διατυπώσετε τον ορισμό του μετρικού χώρου. Πότε ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X,ρ) λέγεται ανοικτό και πότε κλειστό; Να δείξετε ότι η τομή δυο ανοικτών υποσυνόλων του X είναι ανοικτό υποσύνολο του X.
(β) Να δώσετε τους ορισμούς της ανοικτής μπάλας και της κλειστής μπάλας κέντρου x_0 και ακτίνας ε και να δείξετε ότι η πρώτη είναι πάντα ανοικτό υποσύνολο και η δεύτερη πάντα κλειστό υποσύνολο του X.

Θέμα 2. (1,5 μον.)
Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και Γ, Δ δύο μη κενά υποσύνολα του X. Δείξτε ότι $\rho(\Gamma,\Delta)=\rho(\overline{\Gamma},\overline{\Delta})$.

Θέμα 3. (2 μον.)
Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι και $f:X\to Y$ μια συνεχής συνάρτηση. Να δείξετε ότι:
(α) Αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι μια ακολουθία στο X και $x_0\in X$ με $x_n\xrightarrow{\rho}x_0$ τότε $f(x_n)\xrightarrow{d}f(x_0)$.
(β) Αν A είναι τυχόν υποσύνολο του X τότε $f(\overline{A})\subseteq\overline{f(A)}$.

Θέμα 4. (1,5 μον.)
(α) Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και $(B_i)_{i\in I}$ μια οικογένεια συνεκτικών υποσυνόλων του X ώστε $\bigcap\limits_{i\in I}B_i\neq\emptyset$. Να δείξετε ότι το σύνολο $\bigcup\limits_{i\in I}B_i$ είναι συνεκτικό.
(β) Να δώσετε (αιτιολογώντας πλήρως την απάντησή σας) ένα παράδειγμα συνεκτικού υποσυνόλου A στο $\mathbb{R}^2$ ώστε το εσωτερικό του A^o να μην είναι συνεκτικό.

Θέμα 5. (2 μον.)
Έστω (X,ρ), (Y,d) δύο μετρικοί χώροι, K ένα συμπαγές υποσύνολο του X και $f:X\to Y$ μια συνεχής συνάρτηση.
(α) Δείξτε ότι το K είναι κλειστό υποσύνολο του X.
(β) Δείξτε ότι το $f(K)$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

Θέμα 6. (2 μον.)
(α) Να δείξετε ότι αν (X,ρ) είναι ένας πλήρης μετρικός χώρος και A είναι ένα κλειστό υποσύνολο του X τότε το A είναι πλήρες.
(β) Να δείξετε ότι αν (X,ρ) είναι ένας μετρικός χώρος και B είναι ένα πλήρες υποσύνολο του X τότε το B είναι κλειστό.
(γ) Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος και D ένα πυκνό υποσύνολο του X. Αν κάθε βασική ακολουθία $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του D συγκλίνει σε κάποιο $y\in X$, να δείξετε ότι ο μετρικός χώρος (X,ρ) είναι πλήρης.

Καλή Επιτυχία!